Jerzy Gołosz

Platońska apoteoza geometrii

„Niech nie wchodzi u nikt, kto nie zna się na geometrii" głosił podobno napis nad wejściem do Akademii platońskiej.[1] Ta relacja wydaje się być wiarygodna, jeśli wziąć pod uwagę stosunek Platona do geometrii i do matematyki w ogóle. Arytmetyka i geometria były pierwszym i koniecznym elementem kształcenia filozofów, którzy mieliby rządzić idealnym państwem platońskim.[2] Z kolei w ustępie z *Praw*, Gość z Aten w zaskakująco mocnych słowach potępia „śmieszna i haniebną niewiedzę" Greków na temat „wielkości wzajemnie wymierzalnych i niewymierzalnych", czyli tzw. wielkości niewspółmiernych:

> (…) ja sam też późno kiedyś zwróciłem na to uwagę, jak to z nami jest na tym punkcie. Dziwiłem się i wydawało mi się, że to jest stan niegodny ludzi, tylko raczej jakichś tworów świńskiego rodzaju, więc wstydziłem się nie tylko za siebie, ale i za wszystkich Hellenów.[3]

Bardzo zaangażowany i emocjonalny charakter tej wypowiedzi tłumaczy, dlaczego niektórzy historycy matematyki posuwali się do tego, że pisali iż „Platon był, rzec można, prawie opętany matematyką"[4]. Autorzy przytoczonej opinii wyjaśniają w dalszej części tej samej wypowiedzi, skąd się brało zainteresowanie i znajomość matematyki u Platona:

> (…) choć sam nie był w tym zakresie wynalazcą, zapoznawał się, od pewnego okresu swego życia, z odkryciami matematyków współczesnych (z których wielu było jego przyjaciółmi lub uczniami), i stale się nimi interesował w sposób najbardziej bezpośredni, a nawet sugerował nowe kierunki badań; toteż w jego pismach matematyka

---

[1] Zob. np. Heath (1921), s. 284.

[2] Platon, *Państwo*, 525B – 528E. Na przykład, Sokrates w pewnym momencie mówi: „należy zalecić, żeby ci w twoim pięknym państwie w żaden sposób nie zaniedbywali geometrii." (*Państwo*, 527C) Zwieńczeniem całego procesu kształcenia miała być dialektyka.

[3] Platon, *Prawa*, 819C – D. Do Problem wielkości niewspółmiernych, czyli – mówiąc językiem współczesnej matematyki – niewymiernych, powrócę w dalszej części pracy, gdzie też spróbuję pokazać, że obydwa poruszane we wstępie problemy, tzn. fascynacja Platona geometrią i problem wielkości niewspółmiernych, są ze sobą ściśle związane.

[4] Bourbaki (1980), s. 10.

stale służy jako ilustracja lub model (czasem nawet stanowi pokarm, jak u pitagorejczyków, dla jego skłonności do mistycyzmu).[5]

Liczne ustępy z *Państwa* potwierdzają tę diagnozę. Matematyka, czy też może lepiej byłoby powiedzieć metody pomiarowe i rachunkowe, narodziły się z potrzeb praktycznych (obliczanie powierzchni działek, wymienianych towarów, wielkości plonów, dochodów, podatków, liczebności grup ludzkich i stad zwierząt, planowania upraw itp.), ale to nie o takie praktyczne metody rachunkowe Platonowi chodzi, i bardzo mocno to podkreśla ustami Sokratesa:

Więc ten przedmiot, Glaukonie, należałoby ustawowo wprowadzić i przekonać tych, którzy się chcą w państwie zajmować sprawami najważniejszymi, że powinni się zabrać do nauki rachunków i bawić się nią nie tak jak laicy, ale tak długo, aż dojdą do oglądania natury liczb rozumem samym; nie dla celów kupna i sprzedaży, jak to robią kupcy i kramarze, tylko dla celów z wojną związanych i dla samej duszy, aby jej ułatwić odwrócenie się od świata przemijających zjawisk i zwrot w kierunku prawdy oraz istoty rzeczy. (*Państwo,* 525C)

I teraz, kiedy się omówiło przedmiot nauki rachunków, ja myślę o tym, jaki on jest subtelny i z jak wielu względów przydatny dla naszych celów, jeżeli się nim ktoś zajmuje dla samego poznania, a nie dla celów kramarskich. (…) Tak właśnie, jakeśmy to przed chwilą mówili, jak on gwałtownie w górę gdzieś pociąga duszę i zmusza ją do zajmowania się liczbami samymi, a nie dopuszcza żadną miarą, żeby mu ktoś widzialne albo dotykalne ciała, mające swoje liczby, pokazywał i o nich mówił. (525D-E)

Zatem chociaż matematyka posiada pewne zastosowania praktyczne jako swoje uboczne korzyści, tak naprawdę w matematyce „chodzi o poznanie bytu wiecznego, a nie o to, co się kiedyś tam czymś staje i znowu ginie", w szczególności również „poznanie geometryczne dotyczy tego, co istnieje wiecznie."[6]

Dalsza część *Państwa* potwierdza mistyczne podejście do matematyki Platona, o którym piszą Bourbaki. Platon mówi tam o „oczyszczaniu" i „rozpłomienianiu się" duszy, do którego ma dochodzić podczas studiowania matematyki i astronomii:

---

[5] Bourbaki (1980), s. 10. Matematycy, o których wspominają autorzy, to m.in. słynni matematycy pitagorejscy: Archytas i Eudoksos. Eudoksos, jeden z najwybitniejszych matematyków starożytności, był uczniem nie tylko Platona, ale przede wszystkim Archytasa, podejmował też w swoich badaniach problemy, które powstały w matematyce pitagorejskiej (m.in. problem wielkości niewspółmiernych) i dlatego jak najbardziej zasługuje na miano pitagorejczyka. Jako pitagorejczyka przedstawiają go np. Diogenes Laertios i Tatarkiewicz, jako filozofa związanego z Akademią platońską Reale (2008, t.1).

[6] Platon, *Państwo,* 527B

A to jest rzecz niemała, tylko uwierzyć w to jest trudno, że przy studiowaniu tych przedmiotów oczyszcza się pewien organ duszy i rozpłomienia się na nowo, jeżeli marnieć zaczął, i ślepnąć pod wpływem innych zajęć, a lepiej, żeby się ten jeden organ ostał niż tysiąc oczu, bo tym jednym widzi się prawdę. (527E)

Oprócz naturalnych skłonności Platona, na takim jego stosunku do matematyki zaważył na pewno wpływ pitagorejczyków, dla których kontemplacja wiedzy naukowej miała być – jak dobrze o tym wiemy - środkiem służącym do oczyszczenia duszy.

Wiele zdaje się wskazywać na to, że to właśnie pitagorejczycy stworzyli matematykę w takiej postaci, w jakiej opisuje ją Platon: jako naukę zajmującą się istniejącymi poza fizycznym światem idealnymi obiektami, dla których dowodzi się koniecznych i ściśle obowiązujących twierdzeń i z założenia oderwaną od praktycznych zastosowań (co widać doskonale we wcześniejszym cytacie z *Państwa*).[7] O tym, że taka matematyka, która dzisiaj nazywamy platońską, istniała, wiemy z relacji zarówno samego Platona, jak i z prac historyków matematyki. W dwóch słynnych i następujących po sobie fragmentach z *Państwa* Platon opisuje krótko metodę oraz ontologię matematyki i - na co warto szczególnie zwrócić uwagę – wbrew twierdzeniom niektórych autorów,[8] nie postuluje on tam wprowadzenia nowej metody i nowej ontologii, tylko opisuje je jako *już funkcjonujące*:

Myślę, że wiesz, jak to ci, którzy się geometriami i rachunkami, i takimi tam rzeczami bawią, zakładają to, co nieparzyste i parzyste, i kształty, i trzy postacie kątów, i inne rzeczy tym pokrewne, zależnie od tego lub owego zdania, bo niby to już wiedzą, robią z tego treść założeń i uważają za właściwe ani sobie samym, ani drugim nie rozwijać i nie uzasadniać już tych rzeczy w żaden sposób, bo one są każdemu jasne; od nich więc zaczynają i przechodzą do kroków następnych, kończąc oczywiście na tym, co sobie obrali jako cel rozważania. (510C-D)

I to, że posługują się przy tym postaciami widzianymi i mówią o nich, jednakże nie te widziane postacie mając na myśli, tylko tamte, do których widziane są tylko podobne; oni myślą o Czworoboku samym i o Przekątni samej, ale nie o tej, którą właśnie rysują, i o innych tak samo; te rzeczy oni rękami wykonują i kreślą, i one potrafią rzucać cienie i dawać odbicia w wodach, ale oni się nimi posługują znowu tylko tak jak obrazami, a starają się dojrzeć tamte *rzeczy same*, których nikt nie potrafi dojrzeć inaczej, jak tylko myślą. (510D-E)

W pierwszym z powyższych fragmentów Platon przedstawia znaną nam doskonale z napisanych około 300 r. p.n.e. *Elementów* Euklidesa metodę aksjomatyczno – dedukcyjną, polegającą na tym, że wychodzi się od definicji pojęć (matematycy greccy nie rozróżniali

[7] Jak pisał Proklos, scholarcha Akademii i matematyk z V w .n.e., przytaczając zdanie innego matematyka Geminosa z Rodos (I w.n.e.): „nauczyliśmy się od samych pionierów tej nauki nie brać wcale pod uwagę wniosków po prostu możliwych, gdy chodzi o rozumowania, które mają stanowić część naszej nauki geometrycznej" (cytowane za Bourbaki 1980, s. 22).

[8] Zob. np. Batóg (2000), s. 10.

pojęć pierwotnych i pochodnych i starali się korzystając z języka potocznego definiować wszystkie używane terminy) i przyjętych założeń (aksjomatów), a następnie dowodzi się na ich podstawie poszczególnych twierdzeń korzystając z przyjętych reguł wnioskowania. Wiemy z relacji greckich matematyków, że ta metoda była już rzeczywiście znana i stosowana około 100 lat wcześniej przed Euklidesem w *Elementach* pitagorejczyka (lub zbliżonego do pitagorejczyków i relacjonującego ich poglądy) Hipokratesa z Chios, którego dzieło zaginęło, ale które znamy z relacji Simplikiosa zawartych w jego komentarzach do *Fizyki* Arystotelesa.[9] Drugi fragment zawiera pochodzące od samego Platona sformułowanie wspomnianego wcześniej i dominującego dziś w filozofii matematyki poglądu, który nazywamy *platonizmem*. Fragment ten dostarcza, częściowego przynajmniej, potwierdzenia opinii Russella, który twierdził, iż „to, co wydaje się platonizmem , poddane analizie okazuje się w istocie pitagoreizmem”.[10]

Jest rzeczą ciekawą, że to obecne u pitagorejczyków i Platona idealistyczne i mistyczne podejście do matematyki, które nastawiony realistycznie i pragmatycznie nastawiony filozof uzna zapewne za zbyteczną metafizykę (dla takiego filozofa już sam termin „mistyczny” będzie obciążony pejoratywną konotacją), nie ogranicza się do wspomnianych filozofów greckich i nie jest bynajmniej rzadkie wśród matematyków: jak zauważył Russell, któremu nieobce były tego typu odczucia w początkach jego filozoficznego rozwoju: „dla tych, którzy doświadczyli owej upajającej rozkoszy nagłego zrozumienia, jaką daje od czasu do czasu matematyka, dla tych, którzy ją kochają, stanowisko pitagorejskie będzie całkiem naturalne”[11]. Co więcej, takie z założenia oderwane od praktycznych zastosowań i nastawione na poszukiwanie idealnych i koniecznych struktur wydaje się być konieczne do tego, żeby matematyka mogła w ogóle powstać w takiej postaci, w jakiej ją znamy: złożonej z ogólnych pojęć, dla których ściśle dowodzimy pewnych *koniecznych* prawidłowości. Mierniczy zajęty mierzeniem powierzchni gruntów i wytyczaniem działek nie będzie się przecież zastanawiał nad takimi problemami, jak na przykład:

1) ogólny dowód twierdzenia Pitagorasa;

---

[9] Zob. np. Heath (1921), s. 183, 201; Bourbaki (1980), s. 23; Juszkiewicz (1975), s. 73 – 74.

[10] Russell (2000), s. 59. Krytykuje powyższą tezę Russella Monk (1998), s. 13.

[11] Russell (2000, s. 55) zaraz potem dodaje: „nawet jeśli jest nieprawdziwe” – jest to całkiem zrozumiałe zważywszy, ze *Historię filozofii Zachodu* pisał już w okresie, kiedy całkowicie porzucił podejście pitagorejskie do matematyki (zob. np. Monk 1998).

2) zupełność aksjomatyki geometrii Euklidesa – wiemy na przykład, że Archimedes przyjął pięć dodatkowych aksjomatów uzupełniających aksjomatykę Euklidesa po to aby – *opierając się na nich a nie w sposób dowolny* - móc znaleźć pole powierzchni sfery i odcinka sferycznego oraz obliczać długość okręgu z dowolna dokładnością;[12]
3) niezależność V postulatu Euklidesa od pozostałych jego aksjomatów – problem analizowany przez przeszło dwa tysiące lat doprowadził w końcu niezależnie od siebie kilku matematyków (J. Bolyai, N. Łobaczewski, C. F. Gauss, B. Riemann) do zaproponowania w pierwszej i drugiej połowie XIX w. alternatywnych postulatów i stworzenia w ten sposób geometrii nieeuklidesowych, a zastosowanych w fizyce w ogólnej teorii względności dopiero na początku XXw.[13]

Koś mógłby twierdzić, że ogólny dowód twierdzenia Pitagorasa może prowadzić do zastosowań praktycznych zależności w nim występujących, ale wynikająca z tego twierdzenia i omawiana poniżej niewspółmierność (niewymierność) boków w różnych typach trójkątów prostokątnych do żadnych zastosowań praktycznych z pewnością już nie prowadzi: jest to czysto teoretyczny problem dotyczący niewymierności pojawiających się w niektórych trójkątach prostokątnych, problem o fundamentalnym znaczeniu dla matematyki pitagorejskiej. Archimedes nie musiałby zabiegać o uzupełnianie aksjomatyki Euklidesa, gdyby zależało mu wyłącznie na obliczaniu długości powierzchni i krzywych – do tego wystarczyłoby podanie odpowiednich wzorów. Zależność, lub jej brak, V postulatu Euklidesa od pozostałych aksjomatów nie wpływa też w żaden sposób na jego praktyczną stosowalność.

Podobnie nie widać powodów, dla których specjaliści od rachunków zajęci obliczaniem ilości towarów, dochodów czy też podatków, mieliby się zastanawiać nad tym:

1. Czy mamy prawo dopuścić istnienie innych liczb niż liczby naturalne, tzn. czy mamy prawo przyjąć istnienie liczb wymiernych z powodów innych niż praktyczne korzyści?
2. Czym są wielkości niewspółmierne?
3. Czy matematykę należy oprzeć na arytmetyce, czy też na geometrii? [14]

---

[12] Zob. np. Juszkiewicz (1975), s. 131 – 132.
[13] Zob. np. Juszkiewicz (1975), s. 120; Sklar (1974), rozdz. II.
[14] Omawiane dalej w tekście problemy (1 – 3), podobnie jak wspomniane w punkcie (4) ale nie analizowane w tym artykule zagadnienia kwadratury koła oraz podwojenia sześcianu, były to podstawowe problemy matematyki greckiej czasów Platona.

4. Którykolwiek z wielkich problemów starożytności, taki jak np. *kwadratura koła* (wykreślenie za pomocą cyrkla i linijki kwadratu o polu równym polu danego koła) czy też *podwojenie sześcianu* (tzw. *problem delijski*, polegający na wykreśleniu za pomocą cyrkla i linijki boku sześcianu, którego objętość byłaby dwa razy większa niż danego).[15]

Wszystkie powyższe problemy są problemami czysto teoretycznymi, które pitagorejczycy rozwijający matematykę przed Platonem oraz współcześni Platonowi rozwijali jako problemy takie właśnie: reprezentowanie liczb wymiernych w postaci par liczb naturalnych i ich stosunków zamiast ułamków utrudnia raczej niż ułatwia praktyczne operowanie nimi;[16] odkrycie wielkości niewspółmiernych niedających się wyrazić w postaci stosunków liczb naturalnych, które doprowadziło do zmiany sposobu uprawiania algebry poprzez wprowadzenia omawianej poniżej tzw. algebry geometrycznej również nie ułatwia analizy problemów algebraicznych; już Egipcjanie potrafili z dobrą dokładnością (błąd mniejszy niż 1%) obliczać powierzchnię koła,[17] ale Greków interesował czysto teoretyczny problem znalezienia kwadratu o identycznej powierzchni.

Bardzo ciekawym problemem jest to, dlaczego Platon poświęca tak dużo uwagi geometrii i dlaczego zajmuje ona tak ważne miejsce w jego filozofii i w jego systemie nauk; dlaczego napis nad wejściem do Akademii, jeśli rzeczywiście tam się znajdował, wspominał o geometrii a nie po prostu o matematyce. Może się to wydawać tym bardziej zaskakujące, iż Platon pozostawał pod silnym wpływem pitagorejczyków, a najbardziej znana teza metafizyczna pitagorejczyków głosiła – jak wiadomo - że zasadą wszelkiego bytu jest liczba. „Faktycznie wszystko, co daje się poznać, ma liczbę. Nie można by bowiem bez niej ani uchwycić myślą, ani poznać niczego”[18] – pisał na przykład Filolaos, który prawdopodobnie jako pierwszy spisał poglądy pitagorejczyków. Żeby zrozumieć, dlaczego tak właśnie było, trzeba przede wszystkim przypomnieć sobie o specyficznym dla nich rozumieniu kluczowego dla matematyki pitagorejskiej terminu „liczba”. Przez *liczbę* mianowicie rozumieli oni liczby całkowite i to większe od jedności, gdyż „1” miała być monadą i czymś w rodzaju praźródła pozostałych liczb, a nie liczbą w sensie właściwym. Liczby (całkowite dodatnie) były

[15] Zob. np. Juszkiewicz, (1975), s. 90 – 94.

[16] Zob. Juszkiewicz (1975), s. 77 – 78 oraz dalsza część tej pracy.

[17] Zob. Juszkiewicz (1975), s. 34 – 35.

[18] G. Reale (2008), t. 1, s.116.

zbiorami jedności, sama jedność zaś była niepodzielna.[19] Jak odmienne było to rozumienie pojęcia liczby od naszego, widać to dobrze na przykładzie wypowiedzi Sokratesa z *Państwa*, gdzie wyśmiewa on tych, którzy używają ułamków:

(…) jeśli ktoś w rozmowie z dobrymi rachmistrzami spróbuje w myśli dzielić samą jednostkę, to wyśmiewają się i nie przyjmują tego, tylko ją zaczynają mnożyć, bojąc się, żeby się przypadkiem jednostka nie przestała wydawać jednostką, ale zbiorem wielu cząstek. (525E)

W związku z zakładaną niepodzielnością jedności i pozostałych liczb pitagorejczycy i późniejsi matematycy greccy nie uznawali liczb wymiernych (czyli po prostu ułamków oraz sum liczb całkowitych i ułamków), chociaż te były już w powszechnym użyciu u zawodowych rachmistrzów greckich a wcześniej u rachmistrzów egipskich i babilońskich. To czysto metafizyczne względy – omawiana zasada mówiąca, że „wszystko jest liczbą (całkowitą dodatnią)” – sprawiły, iż pitagorejczycy nie chcieli używać liczb wymiernych i zamiast nich mówili o stosunkach (zamiast mówić np. o ½ odcinka mówili, że jest on podzielony w stosunku 1do 2). Teoria wielkości niewspółmiernych, odkryta przez Eudoksosa, wyrażona jest również w języku stosunków wielkości. W języku stosunków wielkości przedstawiał także arytmetykę w *Elementach* Euklides. Liczby wymierne pojawiają się w praktyce matematycznej dopiero u innego matematyka aleksandryjskiego Diofantosa w III w. n.e.[20] Jeżeli nie bralibyśmy pod uwagę pitagorejskich przekonań metafizycznych, matematyka grecka stałaby się nieracjonalna i niezrozumiała. Bez metafizycznych założeń wyznaczających uniwersum dyskursu oraz narzucających pewne ograniczenia na przeprowadzone rozumowania (warunek ścisłości i konieczności rozumowań, o którym pisze Proklos)[21], zajmowaliby się oni nie matematyką, tylko rachunkami, tak jak Egipcjanie i Babilończycy.

W V w. p.n. e. matematycy pitagorejscy dokonali niezwykle ważnego odkrycia, w wyniku którego matematyka a za sprawą matematyki również metafizyka pitagorejska weszły w fazę ostrego kryzysu. Mianowicie, uczeni pitagorejscy prowadząc swoje badania matematyczne odkryli wielkości, które nie dają się sprowadzić do liczb całkowitych, czyli wspominane już kilkakrotnie wielkości niewspółmierne.[22] Łatwo można sprawdzić, że jeżeli

[19] Zob. np. Diogenes Laertios (1984 s. 482), gdzie autor przedstawia poglądy Pitagorasa.
[20] Zob. np. Bourbaki (1980), s. 67, 190-191.
[21] Zob. przyp. 7.
[22] Drugim powodem kryzysu w matematyce greckiej, podobnie jak na przełomie XIX i XX w. był problem nieskończoności. Por. np. Juszkiewicz (1975), s. 96-99.

np. weźmiemy kwadrat o boku jednostkowym, to długość jego przekątnej będzie liczbą niewymierną √2, której nie da się wyrazić przez żaden stosunek liczb całkowitych. Pitagorejczycy znali ten fakt, potrafili go udowodnić, jak o tym świadczą wypowiedzi Platona i Arystotelesa, i musieli być jego odkrywcami.[23] To właśnie o powszechnej niewiedzy na ten temat wśród Greków Platon pisał, że jest „śmieszna i haniebna".

Do kryzysu w matematyce pitagorejskiej nie doszłoby, gdyby nie obecne w niej (metafizyczne) założenia mówiące, iż, po pierwsze, wszystko jest liczbą całkowitą dodatnią, lub stosunkiem takich liczb, a po drugie, że *matematyczna struktura świata jest strukturą ścisłą i konieczną*. Gdyby nie obecność obu wspomnianych założeń, pitagorejczycy mogliby pójść tą samą drogą, którą wybrali Babilończycy, i tak jak oni poprzestać na obliczeniach przybliżonych. Np. √2 Babilończycy przybliżali w swoim pozycyjnym systemie sześćdziesiątkowym przez 1;25 (czyli 1+25/60), √3 przez 1;45 (czyli 1+45/60) a √10 przez 3;10 (czyli 3+10/60). Przy tym podkreślić należy, że to nie brak dokładności tego typu przybliżeń musiał być przeszkodą dla pitagorejczyków, ponieważ znana była w owym czasie i stosowana przez Babilończyków iteracyjna metoda poprawiania przybliżeń.[24] Jeżeli chodzi o pitagorejczyków, to trzeba powiedzieć, że samo odkrycie wielkości niewspółmiernych zakłada odróżnienie wartości dokładnej takiej liczby od jej wartości przybliżonej; nie chcieli oni ograniczać się do przybliżonego obliczania wielkości, ponieważ z założenia odrzucali przybliżone określanie wielkości jako niezgodne z istotą matematyki.[25]

Ponieważ matematycy pitagorejscy odrzucali nieścisłe operowanie liczbami, pozostały im dwa wyjścia: rozszerzyć pojęcie liczby na liczby niewymierne, tak aby przy pomocy nowych liczb można było określić stosunek dowolnej pary wielkości (m.in. odcinków niewspółmiernych), lub też zrezygnować z prymatu liczby i arytmetyki na rzecz geometrii. Rozwiązań szukano w obu kierunkach: w stronę pierwszego rozwiązania zmierza *teoria stosunków wielkości* Eudoksosa, drugie próbowano zrealizować poprzez tzw. *algebrę*

---

[23] Według Platona (*Teajtet,* 147d), Teodor z Cyreny, uchodzący za pitagorejczyka nauczyciel Teajteta, wykazał, iż boki kwadratów, których pola wynoszą 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13,14, 15, 17 są niewspółmierne z bokiem kwadratu jednostkowego. Z kolei Arystoteles pisze w *Analitykach pierwszych* (41a), że jeżeli się założy współmierność przekątnej i boku kwadratu, to liczba nieparzysta byłaby równa liczbie parzystej, co świadczy o tym, że był mu znany słynny dowód nie wprost niewspółmierności przekątnej i boków kwadratu podany później przez Euklidesa w jego *Elementach*.

[24] Por. Juszkiewicz (1975), s. 42, 52-53.

[25] Por Bourbaki (1980), s. 186-187; Juszkiewicz (1975), s. 86. Zob. również przyp. 7.

geometryczną.[26] Chociaż teoria stosunków, odkryta przez Eudoksosa, jest, jak się to obecnie uznaje, pokrewna naszej teorii liczb rzeczywistych (większych od 0),[27] Grecy wybrali drugie z tych rozwiązań.

Eudoksos zaproponował jako pierwszy ogólną teorię, która pozwalała precyzyjnie operować wielkościami różnych typów (długościami, polami, objętościami itd.). Oparta była na podstawie aksjomatycznej, dalekiej oczywiście od zupełności, z najważniejszym chyba tzw. aksjomatem Archimedesa, mającym wykluczyć wielkości (aktualnie) nieskończenie małe i nieskończenie wielkie. Teoria ta, którą znamy z V księgi *Elementów* Euklidesa, pozwalała porównywać wielkości różnego rodzaju: mówiła, że dwie wielkości a i b tego samego rodzaju pozostają do siebie w tym samym stosunku, co dwie wielkości c i d również tego samego rodzaju (chociaż niekoniecznie tego samego rodzaju, co poprzednie), jeżeli dla dowolnych liczb całkowitych m i n:

jeżeli $ma < nb$ to $mc < nd$

jeżeli $ma = nb$ to $mc = nd$

jeżeli $ma > nb$ to $mc > nd$

Pary wielkości, będących w jednym i tym samym stosunku, nazywa Euklides *proporcjonalnymi*, i wykazuje, że relacja proporcjonalności jest relacją przechodnią, a ponieważ jest również symetryczna, dzieli, jako relacja równoważnościowa, wszystkie pary wielkości na klasy par proporcjonalnych do siebie, charakteryzowanych przez określony *stosunek*. Zbiór stosunków łatwo już jest uporządkować według wielkości; $a : b$ jest większe od $c : d$, jeżeli istnieją takie liczby całkowite m i n, że jednocześnie $ma > nb$ i $mc \leq nd$. W efekcie dochodzimy do teorii zbliżonej do teorii przekrojów Dedekinda, który właśnie w podobny sposób wprowadzał liczby rzeczywiste w drugiej połowie XIX w.[28]

---

[26] Por. Juszkiewicz (1975), s. 86 - 96.

[27] Np. Bourbaki (1980, s. 67) piszą o równoważności obu teorii, chociaż zauważają istnienie pewnych różnic, o których piszę w dalszej części mojej pracy.

[28] Por. Juszkiewicz (1975), s. 105 - 110. Podział zbioru liczb wymiernych na dwie klasy A i B nazywa się *przekrojem*, jeżeli

i) obie klasy A i B nie są puste, są rozłączne i wyczerpują cały zbiór liczb wymiernych

ii) każda liczba ze zbioru A jest mniejsza od każdej liczby ze zbioru B.

Każdy przekrój zbioru liczb wymiernych określa pewną liczbę rzeczywistą.

Pomiędzy obu teoriami zachodzą istotne różnice. Po pierwsze, Eudoksos posługuje się parami liczb całkowitych, zaś Dedekind operuje na liczbach wymiernych.[29] Po drugie, Dedekind wprowadza aksjomat ciągłości, mówiący iż każdy przekrój zbioru liczb wymiernych określa pewną liczbę rzeczywistą, Eudoksos zaś takiego aksjomatu nie wprowadza.[30] Trzecia różnica, najbardziej istotna z punktu widzenia tej pracy, polega na tym, że Eudoksos nie miał na celu autonomicznej teorii nowego rodzaju liczb – liczb, które dziś nazywamy rzeczywistymi – a chciał tylko stworzyć teorię, która precyzyjnie liczbowo (w języku stosunków liczb całkowitych) pozwala operować wielkościami geometrycznymi (długościami, polami itd.); Euklides (za Eudoksosem, jak uważamy) nie tylko pracuje ze zbiorami wielkości, takimi jak długości i pola, ale też zawsze dba o to, aby elementy występujące w rachunku miały interpretację geometryczną.[31]

Wygląda to zatem tak, jeśli dokonana tu rekonstrukcja sytuacji problemowej związanej z odkryciem wielkości niewspółmiernych i strategii prowadzącej do jej rozwiązania jest adekwatna, jakby Eudoksos i matematycy greccy mimo odkrycia teorii, która mogła prowadzić do uratowanie założenia o pierwotności liczb i arytmetyki, ale za cenę rozszerzenia pojęcia liczby na wielkości niewspółmierne, zdecydowali się jednak na uznanie pierwotności geometrii w stosunku do arytmetyki. Narzuca się tu oczywiście pytanie, dlaczego tak się stało. Nie jest łatwo odpowiedzieć na to pytanie. Wybór, przed którym stała matematyka grecka, wydaje się prosty z perspektywy tej wiedzy, którą posiadamy. Z punktu widzenia matematyków greckich wybór nie był ani taki prosty, ani taki oczywisty. Problem polega na tym, że metafizyczne teorie, wyznaczające programy badawcze dla nauki, mogą być oceniane, krytykowane i zmieniane dopiero na podstawie tego, jak efektywne są te programy. Dla Greków wcale nie musiało to być oczywiste, że właściwą drogą jest najpierw „dzielenie jedności" a potem wprowadzenie jeszcze bardziej abstrakcyjnych konstrukcji matematycznych i to bez oparcia w geometrii. Program badawczy oparty na założeniu

---

[29] U Eudoksosa dla par liczb wymiernych nie są wprowadzone operacje arytmetyczne (poza składaniem stosunków), ani też relacja porządku. Por Juszkiewicz (1975), s. 108.

[30] Jak zauważa Bourbaki (1980, s. 189-190), Euklides zakłada (przedstawiając teorię Eudoksosa w *Elementach*), chociaż wprost tego nie mówi, istnienie tzw. czwartej proporcjonalnej; jeżeli dany jest stosunek $a : b$, i dana jest wielkość d, to istnieje wielkość c, tego samego rodzaju co d, taka że $a : b = c : d$.

[31] Bourbaki (1980, s. 67) pisze o teorii Eudoksosa (przedstawionej przez Euklidesa) w następujący sposób: „Miażdżąca przewaga geometrii, (którą ma najwyraźniej na celu teoria wielkości) paraliżuje wszelki autonomiczny rozwój znakowania algebraicznego: elementy występujące w rachunku muszą, w każdej chwili, być ‘przedstawione’ geometrycznie."

(metafizycznym) mówiącym o pierwotności geometrii narzucał się w pewien sposób po odkryciu nowych rodzajów wielkości, którymi były odcinki o długości niewymiernej, mające prostą interpretację geometryczną a nieposiadające do czasów Eudoksosa żadnej interpretacji liczbowej, a od czasu jego teorii stosunków interpretację wysoce abstrakcyjną. Jak daleko sięgają konsekwencje jego teorii i jak trudno je było dostrzec, świadczy najlepiej fakt, iż mimo tego, że teoria Eudoksosa była wysoko ceniona przez matematyków tej klasy, co Euklides i Archimedes, zrozumiano je w pełni dopiero w XIX w. po odkryciu przez Dedekinda teorii przekrojów. Program badawczy oparty na geometrii *musiał wykazać swoje ograniczenia i w pewien sposób wyczerpać się*, aby można było wrócić do idei liczbowego opisu świata jako jego opisu podstawowego.[32]

Efektem odkrycia wielkości niewspółmiernych było zatem odrzucenie przekonania (metafizycznego) o pierwotności arytmetyki (liczb całkowitych) i zastąpienie go przekonaniem o pierwotności geometrii. Trzeba tutaj podkreślić, że dokonując takiego przekształcenia swojego programu badawczego, pitagorejczycy nie porzucali bynajmniej całkowicie swojej metafizyki, a tylko ją przekształcali; pozostali oni przecież przy swoim przekonaniu o porządku i harmonii świata¸ uznali tylko, że przejawia się on strukturach geometrycznych a nie liczbowych. Działali wobec tego w oparciu o swoją nadrzędną zasadę (metafizyczną) mówiącą o racjonalności wszechświata (pewnym jego jednorodnym porządku i poznawalności), inaczej tylko tę racjonalność sprecyzowali. Platon pięknie przedstawił tę pitagorejską zasadę w Gorgiaszu:

„Mędrcy powiadają, (…) że niebo, i ziemia, bogowie, i ludzie połączeni są wspólnotą i przyjaźnią, szacunkiem dla porządku, roztropnością, sprawiedliwością i dlatego świat nazywają porządkiem (*cosmos*), przyjacielu, nie zaś nieporządkiem lub bezładem[33]

W matematyce pitagorejskiej uznanie pierwotności geometrii zaowocowało stworzeniem tzw. algebry geometrycznej, zaś w filozofii platońską metafizyką opartą na geometrii. W ramach *algebry geometrycznej*, którą znamy z prac m.in. Euklidesa i Archimedesa, liczby zaczęto przedstawiać w szacie geometrycznej; zamiast liczb przedstawionych w postaci punktów umieszczonych w wierzchołkach wielokątów foremnych, zaczęto je traktować jako odcinki mające odpowiednią długość mierzoną odcinkiem

[32] Bourbaki piszą w cytacie w poprzednim przypisie o geometrycznej szacie, która „paraliżuje” rozwój znakowania algebraicznego, a w innym miejscu (s. 190) o konstrukcji Eudoksosa, że mimo ścisłości i spoistości „była za sztywna i niezbyt sprzyjała rozwojowi rachunku numerycznego, a zwłaszcza rachunku algebraicznego”.

[33] Platon. *Gorgiasz*: 507e - 508a.

jednostkowym, iloczyn liczb stał się polem odpowiedniego prostokąta rozpiętego na bokach o odpowiedniej długości. Dodawanie liczb było dodawaniem odcinków, odejmowanie odejmowaniem odpowiednich odcinków (pod warunkiem, że pierwszy jest dłuższy), a wzoru takiego, jak np. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, dowodzono składając pole kwadratu o boku $a + b$ z pól mniejszych kwadratów i prostokątów.[34]

Nowa metafizyka w filozofii znalazła swoje ciekawe ujęcie w platońskim *Timajosie*. Platon (*Timajos*, 55a – 56c) przyjmuje tam, jak można sądzić za pitagorejczykiem Filolaosem, że cztery elementy, z których zbudowany jest cały świat, skonstruowane są z brył foremnych - autor *Timajosa* przypisuje ostrosłup ogniowi, ośmiościan powietrzu, dwudziestościan wodzie a sześcian ziemi[35] - a te z kolei mają być zbudowane z trójkątów:

> Weźmy zatem dwa trójkąty, z których zbudowane są ciała ognia i innych elementów. Jeden z nich jest równoramienny, a drugi taki, który ma zawsze kwadrat największego boku trzy razy większy od kwadratu boku najmniejszego. (…) Przedtem nam się zdawało, że cztery wzmiankowane elementy rodzą się zawsze nawzajem jedne z drugich. Otóż to przypuszczenie nie było ścisłe. W rzeczywistości cztery gatunki rodzą się istotnie z trójkątów [prostokątnych], o których dopiero co mówiliśmy; lecz trzy spośród nich rodzą się z tego samego trójkąta, który ma boki nierówne, a jedynie czwarty jest utworzony z trójkąta równoramiennego.[36]

Intencje Platona są tu wyraźnie widoczne i nieprzypadkowe; budulec świata musi być na tyle kompletny, aby dałoby się z niego wszystko skonstruować, również nowoodkryte wielkości niewspółmierne. Zastosowanie trójkątów, z których da się skomponować bryły doskonałe (wielościany foremne) przyporządkowane przez Filolaosa poszczególnym elementom, i w których występują niewymierności $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ wydaje się zatem rozwiązaniem spełniającym wszystkie możliwe wymagania.[37]

---

[34] Por. Juszkiewicz (1975), s. 86-96. Nasz zwyczaj nazywania drugiej potęgi danej liczby „kwadratem" a trzeciej „sześcianem" wywodzi się, jak można sądzić, właśnie z algebry geometrycznej.

[35] Reale (2008, t.1, s. 115) uważa, że idea przypisania ostrosłupa – ogniowi, ośmiościanu – powietrzu, dwudziestościanu – wodzie a sześcianu – ziemi pochodzi prawdopodobnie od Filolaosa.

[36] *Timajos*, 54b-c. B. Jowett w swoim przekładzie *Timajosa* zamiast „boku najmniejszego" pisze „boku mniejszego", co jest bardziej poprawne matematycznie. Podobnie jak Jowett tłumaczy ten ustęp Witwicki.

[37] Popper (1999) jest przekonany o tym, ze Platon, podobnie jak pitagorejczycy, uznał priorytet geometrii nad arytmetyką po to aby rozwiązać problem istnienia wielkości niewspółmiernych. Na podstawie stwierdzenia Platona „Wszystkie trójkąty wywodzą się od dwóch rodzajów trójkątów, z których każdy ma jeden kąt prosty i inne ostre" (*Timajos*, 53d), Popper (1999, s. 159) wnioskował, iż Platon uważał, że wszystkie wielkości niewymierne można przedstawić jako iloczyny liczb wymiernych i pierwiastka z dwóch lub trzech. Trzeba tu jednak przypomnieć, że Platon nie był pewien, czy znalazł wszystkie podstawowe trójkąty: „gdyby jednak ktoś

Budulcem świata stały się w ten sposób figury geometryczne i przestrzeń a podstawową nauką geometria. Dodatkowo potwierdza tego typu interpretację fakt, że tworzywem, z którego demiurg zbudował świat w *Timajosie* – trzecim gatunkiem, czyli tym, „w czym się tworzy odbicie" (*Timajos,* 50e) - wydaje się być przestrzeń:

Oto pokrótce rozumowanie wyprowadzone z moich założeń: nim powstało niebo, istniały już trzy różne sposoby, trzy zasady różne od siebie: byt [absolutny], miejsce i to, co się rodzi. Żywicielka tego, co się rodzi, zwilżona, rozpalona, otrzymuje także formy ziemi oraz powietrza i ulegając wszystkim innym modyfikacjom, które im towarzyszą, przedstawia się wzrokowi jako nadzwyczajnie różnorodna.[38]

Oceniając dzieło Demiurga Platon pisze , iż Bóg wprowadził do niego porządek „bo uważał, ze porządek jest bez porównania lepszy od nieporządku" (*Timajos,* 30a) a „nie było ani wówczas, ani kiedykolwiek dozwolone, aby najlepsza istota robiła coś, co nie jest najpiękniejsze" (*Timajos,* 30b). Porządek i doskonałość wszechświata przejawia się dla Platona w jego porządku i harmonii matematycznej,[39] a ten musi przejawiać się również w doskonałości geometrycznej, skoro geometria ma stanowić podstawę matematyki. To przekonanie Platona bardzo silnie wpłynęło na jego sposób patrzenia na świat i wyjaśniania jego budowy: Bóg zaokrąglił świat w *kształt koła i kuli,* bowiem „ten kształt jest spośród wszystkich najdoskonalszy i najbardziej podobny do siebie samego" (*Timajos,* 33b). Nadał mu przy tym *obrót jednostajny* sprawiając, ze kręci się w koło (*Timajos,* 34a-b). Takie rozwiązania bynajmniej nie są oczywiste: Ziemia nie jest przecież *ściśle biorąc* kulą, każda codzienna obserwacja naszego otoczenia temu przeczy. Podobnie ruch ciał niebieskich na niebie, ta jak go obserwujemy z Ziemi, nie jest jednostajny, z czego Platon doskonale zdawał sobie sprawę[40]: kiedy obserwujemy z Ziemi Merkurego, Wenus, Marsa, Jowisza i Saturna,

---

mógł odkryć i wymienić inny trójkąt tego gatunku [różnobocznego], jeszcze piękniejszy, niech za to otrzyma nagrodę; będziemy w nim widzieć nie wroga, lecz przyjaciela." (*Timajos*, 54a-b)

[38]Tworzywo, z którego zbudowany jest świat, Platon opisuje w *Timajosie* również w ten sposób: „Jest wreszcie trzeci rodzaj, który istnieje zawsze, mianowicie miejsce; jest ono niezniszczalne, ofiarowuje pobyt u siebie wszystkim przedmiotom, które się rodzą". Według innych interpretacji tym trzecim gatunkiem miałaby być materia, taka interpretacja wydaje się jednak niespójna z tą częścią *Timajosa,* w której wszystkie elementy skonstruowane zostają z figur geometrycznych.

[39] Zob. Timajos 31c – 32c.

[40] Zob. *Timajos*, 38e – 39c.

planety te wydają się „błądzić", przesuwając się ze zmienną prędkością, ale też czasami cofając się na tle gwiazd stałych, co jest wynikiem ruchu nas obserwatorów na Ziemi.[41]

Kiedy Platon wyjaśniał, lub zalecał wyjaśniać obserwowane zjawiska, w których porządek lub przyczyna istniejących regularności nie zawsze są widoczne, przez odwołanie do ukrytej harmonii, którą dopiero trzeba odkryć, postępował dokładnie według metody, którą zalecał filozofom, a polegającą na „odwróceniu się od świata przemijających zjawisk i zwrot w kierunku prawdy oraz istoty rzeczy".[42] Według relacji Simplikiosa i Sozygenesa Platon postulował wyjaśnianie obserwowanych ruchów planet poprzez *jednorodne i uporządkowane* ruchy ciał na niebie, przez co rozumiał jednostajne ruchy kołowe.[43] W *Timajosie* akt kreacji świata przez Boga Platon opisuje w następujący sposób:

> Dał mu za to ruch fizyczny dostosowany do jego ciała, ten mianowicie spośród siedmiu ruchów, który ma przed wszystkim związek z rozumem i myślą; nadając mu obrót jednostajny w tym samym miejscu, sprawił, że się kręci w koło. (*Timajos*, 34a)

Wspomniany przez Simplikiosa i Sozygenesa postulat udało się zrealizować Eudoksosowi w jego teorii sfer homocentrycznych. W teorii tej planety związane są z koncentrycznymi sferami, współśrodkowymi z Ziemią. Każda ze sfer wykonuje jednostajny ruch obrotowy wokół osi, które nie musiały się ze sobą pokrywać. Poszczególne planety wykonują ruchy, który są kombinacjami ruchów sfer, z którymi były związane. Eudoksos otrzymał w ten sposób dość skomplikowany ruch po krzywej przypominającej ósemkę (tzw. hipopedzie), która z kolei przemieszczała się wokół nieba wraz z długookresowym ruchem planety. Najważniejszą cechą tej konstrukcji jest to, że był to pierwszy model geometryczny *wyjaśniający* (co najmniej jakościowo) *obserwowane ruchy planet*, i *sprowadzające ruchy te - traktowane dotąd jako błądzące - do pewnego prawa*.[44] To była ta kluczowa, i nowatorska w

---

[41] Z tego to właśnie powodu Ptolemeusz, a przed nim Apolloniusz i Hipparch, musieli wprowadzić w swoim systemie geocentrycznym skomplikowany system epicykli i deferentów: wspomniane w tekście planety poruszają się ruchem jednostajnym po *epicyklach*, czyli mniejszych kołach, których środki poruszają się ruchem jednostajnym po obwodach większych kół – *deferentów*. Zob. np. Rybka (1983), s. 142 – 147; North (1997), s. 68 - 78.

[42] Platon (*Państwo*), 525C. Jest to dokładnie zaprzeczeniem wpływowej tradycji, której znanym współczesnym zwolennikiem jest Baas van Fraassen (1980) a której naczelnym hasłem jest „zachować zjawiska". Zgodnie z tą tradycją naszym zadaniem jest tylko opisywanie adekwatne tego, co obserwowalne, odrzuca się natomiast postulat wyjaśniania zjawisk przez odwołanie się do tego nieobserwowalne.

[43] Według Geminosa postulat ten wysunięty został wcześniej przez pitagorejczyków - zob. North (1997), s. 55.

[44] Zob. North. (1997), s. 56-61.

astronomii cecha teorii Eudoksosa, która zdecydowała o jej znaczeniu. Wcześniejsze teorie – przede wszystkim babilońskie – polegały na opisywaniu obserwowanych położeń gwiazd i przewidywaniu na podstawie zaobserwowanych regularności przyszłych położeń, przede wszystkim dla celów kalendarzowych, Eudoksosowi natomiast bardziej zależało, tak jak pitagorejczykom, Platonowi i kolejnym pokoleniom uczonych greckich, na zrozumieniu na czym polega porządek i harmonia świata niż na dokładności przewidywań. Teoria Eudoksosa stała się punktem wyjścia dla kolejnych geometrycznych i geocentrycznych teorii Kalliposa i Arystotelesa.[45] Z kolei teorie te oraz „poruszające" Ziemię geometryczne teorie pitagorejczyków doprowadziły do odkrycia bliskiej naszemu rozumieniu Układu Słonecznego heliocentrycznej teorii Arystarcha.[46]

Nauka współczesna powróciła do pierwotnego pitagorejskiego przekonania o pierwotności liczb i ich teorii w stosunku do geometrii wraz z jej obiektami, z pojęciem liczby rozszerzonej o liczby wymierne i niewymierne, jakkolwiek – o czym warto wspomnieć – w ciągu dziejów podejmowano jeszcze kilkakrotnie próby oparcia nauki opisującej najbardziej podstawowe własności naszego świata, czyli fizyki, na geometrii. Wysiłki te jednak ograniczały się do geometryzacji tylko fragmentów naszej rzeczywistości (na przykład w ogólnej teorii względności zgeometryzowano oddziaływania grawitacyjne) lub kończyły się niepowodzeniem, jak miało to miejsce w przypadku próby geometryzacji fizyki w ramach geometrodynamiki Wheelera; za każdym razem trudności w realizacji tego programu zmuszały do jego porzucenia lub przynajmniej ograniczenia (w przypadku samej teorii Einsteina geometryzacja z założenia była ograniczona do grawitacji).[47] Oczywiście niepowodzenia te nie przesądzają o fałszywości zasady, na której próby te były oparte i nie jest wykluczone, że jakaś podjęta w przyszłości próba realizacji podobnego programu zakończy się sukcesem. Nawet jednak jeżeli to nie nastąpi, to należy podkreślić, że pitagorejsko-platoński program oparcia nauki i matematyki w szczególności na geometrii był nie tylko sensowny – znajdując swoje w pełni racjonalne uzasadnienie w ówczesnym stanie naszej wiedzy - ale również płodny przez to, że umożliwił dalszy rozwój nauki. Badanie

[45] Zob. North (1997), s. 61-65.

[46] Arystoteles (*O niebie*, 293a) pisał: „Przeciwnego zdania są ci, którzy należą do szkoły italskiej, zwani pitagorejczykami. Twierdzą oni mianowicie, że w środku wszechświata jest ogień, a Ziemia jest tylko jedną z gwiazd i swoim ruchem dokoła środka powoduje dzień i noc. Prócz tego dobierają do pary jeszcze Ziemię, przeciwległą do naszej, i nazywają ją Antychton ('Przeciw-Ziemią')." Teorię Arystarcha omawia North (1997), s. 65 – 68.

[47] Zob. Clifford (1988), Einstein (1999), Fletcher (1988).

obiektów geometrycznych, takich jak kwadraty i trójkąty prostokątne, umożliwiło poznanie nowego rodzaju obiektów matematycznych, którymi były wielkości niewspółmierne, co w końcu doprowadziło do poznania liczb niewymiernych. Jeszcze ważniejsze konsekwencje miało pitagorejsko-platońskie przekonanie o doskonałym porządku geometrycznym wszechświata; umożliwiło ono poprzez konstruowanie kolejnych geometrycznych modeli astronomicznych geo- i heliocentrycznych odkrycie w końcu prawa grawitacji, mechaniki newtonowskiej oraz teorii względności. Platon miał zatem rację twierdząc, że matematyka, i geometria w szczególności, umożliwiają nam „odwrócenie się od świata przemijających zjawisk i zwrot w kierunku prawdy oraz istoty rzeczy".

LITERATURA

Arystoteles (1990), *Analityki pierwsze*, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 1, tł. K. Leśniak, PWN, Warszawa.

Arystoteles (2003), *Fizyka*, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 2, tł. K. Leśniak, PWN, Warszawa.

Arystoteles (2003), *O niebie*, [w:] *Dzieła wszystkie*, t. 2, tł. P. Siwek, PWN, Warszawa.

Batóg, T. (2000), *Dwa paradygmaty matematyki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Bourbaki, N. (1980), *Elementy historii matematyki*, tł. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa.

Clifford, W. K. (1988), „O przestrzennej teorii materii", [w:] J. Misiek (red.), tł. J. Werszowiec Płazowski, *Filozofia czasoprzestrzeni*, skrypt UJ.

Diogenes Laertios, (1984), *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, tł. I. Krońska, K. Leśniak, W. Olszewski, PWN, Warszawa.

Einstein, A. (1999), "Autobiografia", [w:] S. Butryn (red.), tł. K. Napiórkowski, *Albert Einstein. Pisma filozoficzne*, Wyd. IFiS, Warszawa.

Fletcher, J. G. (1984), "Geometrodynamika" ", [w:] J. Misiek (red.), tł. J. Werszowiec Płazowski, *Filozofia czasoprzestrzeni*, skrypt UJ.

Heath, T. (1921), *A History of Greek Mathematics*, vol.1, Clarendon Press, Oxford.

Juszkiewicz, A. P. (red.), (1975), *Historia matematyki*, t. 1, tł. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa.

Monk, R. (1998), *Russell*, tł. J. Hołówka, Amber, Warszawa.

North, J. (1997), *Historia astronomii i kosmologii*, Książnica, Katowice.

Platon (1986), *Timajos*, tł. P. Siwek, PWN, Warszawa.

Platon, (1991), *Gorgiasz*, tł. P. Siwek, PWN, Warszawa.

Platon (1999), *Państwo*, tł. W. Witwicki, Antyk, Kęty.

Platon (1999), *Prawa*, tł. W. Witwicki, Antyk, Kęty.

Platon (2002), *Teajtet*, tł. W. Witwicki, Antyk, Kęty.

Popper, K. R. (1999), *Droga do wiedzy*, tł. S. Amsterdamski, PWN, Warszawa.

Reale, G. (2008), *Historia filozofii starożytnej*, t. 1, 2, tł. E. I. Zieliński, Wydawnictwo KUL, Lublin.

Russell, B. (2000), *Dzieje filozofii Zachodu*, tł. T. Baszniak, A. Lipszyc, M. Szczubiałka, Aletheia, Warszawa.

Rybka, E. (1983), *Astronomia ogólna*, PWN, Warszawa.

Sklar, L. (1974), *Space, Time, and Spacetime*, University of California Press, Berkeley.

Tatarkiewicz, W. (1998), *Historia filozofii*, t. 1, PWN, Warszawa.

Van Fraassen, B.C. (1980), *The Scientific Image*, Oxford University Press, Oxford.